Rudolf Pleier

Nullstellenverteilung der Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung dritter Ordnung

Leseprobe – © Mediengruppe Westarp

Impressum:

Pleier, Rudolf
Nullstellenverteilung der Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung dritter Ordnung

1. Auflage 2020

© 2020 Westarp BookOnDemand

in der Mediengruppe Westarp
Kirchstr. 5
39326 Hohenwarsleben
www.westarp.de

ISBN: 978-3-96004-078-1

Druck und Bindung: Druckerei Kühne & Partner GmbH & Co. KG
www.unidruck7-24.de

Printed in Germany.

Alle Rechte vorbehalten, insbesondere die der
fotomechanischen Vervielfältigung oder Übernahme
in elektronische Medien, auch auszugsweise.

Leseprobe – © Mediengruppe Westarp

Vorwort

Es wird die homogene lineare Differentialgleichung (Dgl.) dritter Ordnung

(L) $$L[y] \equiv y''' + py'' + qy' + ry = 0$$

mit im Intervall J ($\subseteq \mathbb{R}$) stetigen Koeffizienten p, q, r betrachtet. Im ersten Kapitel werden für komplexwertige Koeffizienten und Lösungen hinreichende Bedingungen an die Koeffizienten von (L) dafür hergeleitet, dass bei den Lösungen und deren Ableitungen gewisse Nullstellenkonfigurationen nicht auftreten können. Dabei werden Resultate von Divakova (1970) und Herold (1972), die den Spezialfall $p \equiv q \equiv 0$ behandeln, verallgemeinert und Methoden angegeben, mit denen weitere derartige Kriterien gewonnen werden können. In den Kapiteln 2, 3 und 4 werden nur reellwertige Koeffizienten und Lösungen betrachtet. Diese Kapitel können auch unabhängig vom ersten Kapitel gelesen werden.

Im engen Zusammenhang mit der Differentialgleichung (L) steht die zu (L) adjungierte Differentialgleichung

(L^+) $$L^+[z] \equiv ((z' - pz)' + qz)' - rz = 0$$

($p, q, r \in C(J)$; siehe Barrett[1] (1964) und für die Dgl. n-ter Ordnung Hinton[2] (1966)), die äquivalent ist zu dem System von homogenen linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\begin{aligned} v_1' &= pv_1 + v_2 \\ v_2' &= -qv_1 + v_3 \\ v_3' &= rv_1 \end{aligned}$$

für die Funktion

$$v_1 = z$$

und deren verallgemeinerten Ableitungen

$$v_2 = D^1[z] = z' - pz,$$
$$v_3 = D^2[z] = (D^1[z])' + qz.$$

In der Literatur wurde bisher meist noch die 1766 von Lagrange[3] betrachtete klassische Adjungierte

(L*) $$L^*[z] \equiv z''' + Pz'' + Qz' + Rz = 0$$

mit $P = -p$, $Q = q - 2p'$, $R = -r + q' - p''$ für den Spezialfall $p \in C^2(J)$, $q \in C^1(J)$ verwendet. Im Kapitel 2 werden allgemeine Beziehungen zwischen den Differentialgleichungen (L) und (L^+) dargestellt. Unter Verwendung der Tatsache, dass die zu (L) und (L^+) gehörigen dreidimensionalen Lösungsräume S und S^+ mit der durch

$$B[y,z] = y''z - y'D^1[z] + yD^2[z]$$

gegebenen Bilinearform $B : S \times S^+ \to \mathbb{R}$ als skalaren Produkt[4] ein duales Raumpaar bilden, werden Wechselbeziehungen zwischen den Lösungen von (L) und (L^+), zwischen deren Nullstellenverteilungen und zwischen den Lösungsräumen S und S^+ hinsichtlich Oszillation, Existenz von stark oszillatorischen zweidimensionalen Unterräumen und Diskonjugiertheit bewiesen. Außerdem werden Charakterisierungen von speziellen Doppelkegelstrukturen der Menge N der nichtoszillatorischen

---

1 John H. Barrett (1922–1969) war ein US-amerikanischer Mathematiker, der bekannt ist für seine Arbeiten über die Oszillation und Diskonjugiertheit von linearen Differentialgleichungen und über Randwertprobleme.

2 Don B. Hinton (1937–) ist ein US-amerikanischer Mathematiker mit Forschungsinteressen in der Spektraltheorie von Differentialgleichungen und den damit verbundenen Funktionsungleichungen.

3 Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) war ein italienischer Mathematiker und Astronom.

4 Für die Abbildung B wird in Kapitel 2 gezeigt, dass sie Werte in $\mathbb{R}$ hat, bezüglich der Argumente $y \in S$ und $z \in S^+$ jeweils linear ist und die beiden folgenden Eigenschaften aufweist: 1) $B[y,z] = 0 \ \forall\, z \in S^+ \Rightarrow y = 0$; 2) $B[y,z] = 0 \ \forall\, y \in S \Rightarrow z = 0$. Somit wird nach Kowalsky (1967), S. 251, $(S,S^+;B)$ als ein duales Raumpaar und B als das die Dualität bestimmende skalare Produkt bezeichnet. Hans-Joachim Kowalsky (1921–2010) war ein deutscher Mathematiker, der sich mit topologischen Vektorräumen befasste.

Leseprobe – © Mediengruppe Westarp

Lösungen von (L) durch asymptotische Eigenschaften der Lösungen gegeben und Beispiele für derartige Strukturen aufgeführt.

Wilczynski[5] hat 1905 für die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung – hier wird es in Kapitel 3 für $n = 3$ formuliert – die Funktionswerte

$$y_1(x), y_2(x), y_3(x) \qquad (x \in J)$$

eines beliebig fixierten Fundamentalsystems y_1, y_2, y_3 von (L) als die homogenen Koordinaten eines Punktes

$$P = P(x) = [(y_1(x),y_2(x),y_3(x))]$$

in der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$ interpretiert. Wenn x das Intervall J durchläuft, bewegt sich der Punkt P(x) entlang der sogenannten Integralkurve C von (L). Die Tangente von C im Kurvenpunkt ist die Gerade durch die beiden Punkte $P(x)$ und $P'(x)$, wobei $P'(x)$ die homogenen Koordinaten $y_j'(x)$ ($j = 1, 2, 3$) besitzt, und hat die homogenen Geradenkoordinaten (Hyperebenenkoordinaten)

$$z_1(x), z_2(x), z_3(x),$$

wenn z_1, z_2, z_3 das zu y_1, y_2, y_3 adjungierte Fundamentalsystem von (L*) ist. Dies gilt auch mit (L^+) statt (L*).

Diese Integralkurve C benutzt 1911 Birkhoff[6], um mittels geometrischer Begründungen Resultate über die Nullstellen der Lösungen herzuleiten. Um eine Nullstelle einer nichttrivialen Lösung von (L) als Inzidenz in $\mathbb{P}^2$ zu interpretieren und die Lösung selbst in $\mathbb{P}^2$ geometrisch zu veranschaulichen, deutet er die Koordinaten c_1, c_2, c_3 dieser nichttrivialen Lösung

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3$$

von (L) bezüglich der Basis y_1, y_2, y_3 von S als die homogenen Koordinaten einer Geraden in der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$. Demzufolge ist $x_0 \in J$ eine Nullstelle (bzw. eine zweifache Nullstelle) von y genau dann, wenn die zu y gehörige Gerade $\langle (c_1,c_2,c_3) \rangle$ in $\mathbb{P}^2$ die Integralkurve im Punkt $P(x_0) = [(y_1(x_0),y_2(x_0),y_3(x_0))]$ trifft (bzw. berührt).

In der vorliegenden Arbeit werden in Kapitel 3 und 4 nun auch noch die Nullstellen der nichttrivialen Lösungen

$$z = d_1z_1 + d_2z_2 + d_3z_3$$

von (L^+) als Inzidenzen in $\mathbb{P}^2$ interpretiert und die Lösungen selbst in $\mathbb{P}^2$ geometrisch veranschaulicht, indem man deren Koordinaten d_1, d_2, d_3 bezüglich der Basis z_1, z_2, z_3 von S^+ als die homogenen Koordinaten eines Punktes in der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$ deutet. Demzufolge ist $x_0 \in J$ genau dann eine Nullstelle von z, wenn der zu z gehörige Punkt $[(d_1,d_2,d_3)]$ in $\mathbb{P}^2$ auf der Tangente von C im Punkt $P(x_0)$ mit den Geradenkoordinaten $z_k(x_0)$ ($k = 1, 2, 3$) liegt. Und x_0 ist genau dann eine zweifache Nullstelle von z, wenn der zu z gehörige Punkt $[(d_1,d_2,d_3)]$ auf der Integralkurve C liegt und zwar gleich $P(x_0)$ ist.

Allgemeiner wird gezeigt, dass die nichttrivialen Lösungen $y \in S$ und $z \in S^+$ genau dann orthogonal bezüglich des skalaren Produktes B sind ($B[y,z] = 0$), wenn in $\mathbb{P}^2$ die zu y gehörige Gerade durch den zu z gehörigen Punkt geht. Damit lassen sich also Resultate über die Nullstellenverteilung der Lösungen von (L) und (L^+) geometrisch veranschaulichen und umgekehrt hat man dadurch auch eine Quelle für Vermutungen über neue mögliche Sätze und auch deren analytische Beweise.

Hinsichtlich der Ergebnisse von Birkhoff schreibt Barrett (1969), S. 431: „Obwohl bei jeder Arbeit über Differentialgleichungen dritter Ordnung der Hinweis auf Birkhoffs Artikel nicht fehlen

[5] Ernest Julius Wilczynski (1876–1932) war ein deutschstämmiger US-amerikanischer Mathematiker, der sich mit projektiver Differentialgeometrie befasste.

[6] George David Birkhoff (1884–1944) war ein US-amerikanischer Mathematiker mit Arbeiten in der Ergodentheorie, Zahlentheorie, Relativitätstheorie, zum Dreikörperproblem und zum Vier-Farben-Satz.

Leseprobe – © Mediengruppe Westarp

darf, werden seine Ergebnisse und Methoden selten erwähnt.“ Daher werden nun in der hier vorliegenden Arbeit mehrere seiner geometrisch begründeten Resultate auch noch analytisch bewiesen. Dazu werden in Abschnitt 3.1 zunächst geometrische Eigenschaften der Integralkurve C wie etwa das Auftreten der Spiralform oder von Doppelpunkten, Doppeltangenten, Selbstschneidungen, Selbstberührungen, der Treffpunktfreiheit bzw. der Schnittpunktfreiheit der Tangenten mit dem vorhergehenden bzw. nachfolgenden Kurvenstück und der Spiralform durch analytische Bedingungen an Lösungen von (L) und (L^+) ausführlich charakterisiert. In Abschnitt 3.2 wird dann ein von Birkhoff geometrisch begründeter allgemeiner Trennungssatz richtiggestellt und in verallgemeinerter Form analytisch bewiesen. Außerdem werden neue Sätze über die Nullstellenverteilung der Lösungen aufgestellt und mittels der Integralkurve C geometrisch veranschaulicht.

Für viele Aussagen über die Lösungen der Differentialgleichung (L) bzw. (L^+) genügt es anstelle von Bedingungen an die Koeffizienten p, q, r vorauszusetzen, dass die Differentialgleichung zu einer gewissen Klasse gehört, was heißen soll, dass bei den Lösungen und deren (verallgemeinerten) Ableitungen gewisse Nullstellenkonfigurationen nicht auftreten. So ist etwa die Zugehörigkeit der Differentialgleichung (L) in J zur Klasse K_{II} (bzw. K_{I}) dadurch definiert, dass es zu beliebigen Stellen $c, d \in J$ mit $c < d$ (bzw. $d < c$) keine nichttriviale Lösung y von (L) gibt mit

$$y(c) = y'(c) = y(d) = 0 \neq y'(d).$$

Bei einer Differentialgleichung (L) der Klasse K_{II} gibt es also keine nichttriviale Lösung y, die rechts von einer zweifachen Nullstelle c noch eine einfache Nullstelle d besitzt. Geometrisch bedeutet die Zugehörigkeit von (L) zur Klasse K_{II} zunächst, dass jede Tangente von C das nachfolgende Kurvenstück höchstens berührt, aber nicht schneidet. Analog bedeutet die Zugehörigkeit von (L) zur Klasse K_{I}, dass jede Tangente von C das vorhergehende Kurvenstück höchstens berührt, aber nicht schneidet.
Eigenschaften dieser Klassen werden in Kapitel 4 bewiesen hinsichtlich Charakterisierungen der Diskonjugiertheit, Charakterisierung der nichtoszillatorischen Lösungen als die nullstellenfreien Lösungen, Existenz von nichtnegativen (nichttrivialen) Lösungen und von stark oszillatorischen zweidimensionalen Unterräumen, Äquivalenz der Oszillation von (L) und (L^+), Diskonjugiertheit an den Intervallgrenzen und Existenz von nullstellenfreien Lösungen. Zu Letzterem werden auch die entsprechenden Aussagen für die homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung in einem Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ verglichen.
Ferner wird in Abschnitt 4.6 die von Birkhoff 1911 mittels der Integralkurve C geometrisch formulierte und begründete Charakterisierung der Klasse $K_{\mathrm{I}} \cup K_{\mathrm{II}}$ durch die Spiralform mit möglichen Selbstberührungen unter Verwendung der Begriffe Doppelpunkt, Doppeltangente, Selbstschneidung, Selbstberührung und Selbstdurchsetzung von C hier analytisch beschrieben, analytisch bewiesen und die einzelnen Beweisschritte mittels der Integralkurve C veranschaulicht. Dabei besitzt eine Integralkurve $C \in K_{\mathrm{I}}$ eine nach außen fortlaufende Spiralform, bei der die Kurve in einem Kurvenpunkt vom nachfolgenden Kurvenstück höchstens berührt und nicht durchsetzt wird. Eine Kurve $C \in K_{\mathrm{II}}$ besitzt eine nach innen fortlaufende Spiralform, bei der die Kurve in einem Kurvenpunkt vom vorhergehenden Kurvenstück höchstens berührt, aber nicht durchsetzt wird. Es zeigt sich, dass der analytische Beweis wesentlich aufwendiger als der geometrische ist und etlicher Hilfssätze bedarf. In diesem Zusammenhang werden auch Hilfspunkte verwendet, die als Endpunkte maximaler Intervalle einer bestimmten Klassenzugehörigkeit definiert sind. Es werden Wechselbeziehungen zwischen diesen Hilfspunkten, insbesondere Eigenschaften der durch die ersten konjugierten Punkte gegebenen Funktion η beschrieben und auch neue Erkenntnisse zur Differenzierbarkeit von η hergeleitet.

Herrn Prof. Dr. Horst Herold[7] danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit.

[7] Horst Herold (1938–1998) war ein deutscher Mathematiker, der sich mit Differentialgleichungen befasste und Lehrtätigkeiten an den Universitäten in Würzburg, Berlin und Marburg ausübte.

Leseprobe – © Mediengruppe Westarp

Leseprobe – © Mediengruppe Westarp

Inhaltsverzeichnis

1 Nullstellenverteilung bei komplexwertigen Lösungen und deren Ableitungen 11

1.1 Hilfssätze 11

1.2 Hilfsformeln 16

1.3 Nullstellenverteilung der Lösungen für komplexwertige Koeffizienten 18

1.4 Nullstellenfreiheit der komplexwertigen Produktfunktion *ww'w"* 19

1.5 Nullstellenverteilung der reellwertigen Lösungen bei reellwertigen Koeffizienten 21

1.6 Weitere Bedingungen zur Nullstellenverteilung der Lösungen für komplexwertige Koeffizienten 21

1.7 Weitere Bedingungen zur Nullstellenverteilung der reellwertigen Lösungen bei reellwertigen Koeffizienten 23

2 Beziehungen zwischen der linearen Differentialgleichung dritter Ordnung (L) **und ihrer Adjungierten** (L^+) **..... 25**

2.1 Die Bilinearform *B* des Raumpaars (S,S^+) 25

2.2 Eigenschaften der speziellen Lösungen $u_j(.,x_0)$ und $u_m^+(.,x_0)$ 26

2.3 Das skalare Produkt *B* des dualen Raumpaars ($S,S^+;B$) 27

2.4 Definition der Klassen C_{I}^k, C_{II}^k, K_{I}, K_{II} mit den speziellen Lösungen $u_2(.,t)$ und $u_2^+(.,t)$ 27

2.5 Eigenschaften der Klassen 28

2.5.1 Notwendige Bedingung für die Klassen $C_{\mathrm{I}}^3(J)$ und $C_{\mathrm{II}}^3(J)$ 29

2.5.2 Charakterisierung der Klassen $C_{\mathrm{I}}^k(J)$ und $C_{\mathrm{II}}^k(J)$ durch die Lösungen u_j^+ von (L^+) und der Klassen $C_{\mathrm{I}}^{k+}(J)$ und $C_{\mathrm{II}}^{k+}(J)$ durch die Lösungen u_j von (L) 29

2.5.3 Wechselbeziehungen zwischen den Klassen von (L) und denen von (L^+) 29

2.6 Wechselbeziehungen zwischen den Lösungen von (L) und (L^+) 31

2.6.1 Wechselbeziehungen zwischen den speziellen Lösungen $u_j(.,c)$ und $u_j^+(.,c)$ 34

2.6.2 Adjungierte Fundamentalsysteme bzw. duale Basen 35

2.6.3 Die Koordinaten der zu zwei Lösungen orthogonalen Lösung 38

2.6.4 Die Koordinaten der speziellen Lösungen $u_j(.,t)$ und $u_j^+(.,t)$ 39

2.7 Wechselbeziehungen zwischen der Nullstellenverteilung der Lösungen von (L) und der Nullstellenverteilung der Lösungen von (L^+) 40

2.7.1 Oszillation von (L) und von (L^+) 40

2.7.2 Zweidimensionale Unterräume der Lösungsräume *S* und S^+ 41

2.7.3 Beschreibung der zweidimensionalen Unterräume durch Differentialgleichungen zweiter Ordnung 42

2.7.4 Trennung der Nullstellen zweier Funktionen 43

2.7.5 Weitere Wechselbeziehungen zwischen den Nullstellenverteilungen bei (L) und bei (L^+) 45

Leseprobe – © Mediengruppe Westarp

2.7.6 Charakterisierung spezieller Doppelkegelstrukturen der Menge *N* der nicht-oszillatorischen Lösungen und der Menge *O* der oszillatorischen Lösungen beim halboffenen Intervall $J = [a,b[$ 47
2.7.7 Diskonjugiertheit in Teilintervallen von *J* 51

3 Die Integralkurve in der projektiven Ebene 53

3.1 Geometrische Interpretation der Nullstellen der Lösungen 53
3.1.1 Die Integralkurve *C* in der projektiven Ebene 53
3.1.2 Die Integralkurve *C* in der euklidischen Ebene 54
3.1.3 Tangenten von *C* 54
3.1.4 Krümmung von *C* 55
3.1.5 Das begleitende Dreieck von *C* 57
3.1.6 Analytische Beschreibung von Inzidenzen in $\mathbb{P}^2$ 58
3.1.7 Analytische Charakterisierung geometrischer Eigenschaften von *C* 64
3.1.8 Geometrische Beschreibung der Klassen $C_{\mathrm{I}}^{k}(J)$, $C_{\mathrm{II}}^{k}(J)$, $C_{\mathrm{I}}^{k+}(J)$, $C_{\mathrm{II}}^{k+}(J)$, $D(J)$ 67
3.1.9 Geometrische Beschreibung der Klassen $K_{\mathrm{I}}(J)$, $K_{\mathrm{II}}(J)$, $K_{\mathrm{I}}^{+}(J)$, $K_{\mathrm{II}}^{+}(J)$ 69
3.1.10 Weitere geometrische Eigenschaften der Klassen $C_{\mathrm{I}}(J)$, $C_{\mathrm{II}}(J)$, $K_{\mathrm{I}}(J)$, $K_{\mathrm{II}}(J)$ 72
3.1.11 Beispiel für einen geometrischen Beweis 74
3.2 Beziehungen zwischen den Nullstellenverteilungen der Lösungen von (L) und (L^+) 76
3.2.1 Nullstellenanzahl bei zwei nicht orthogonalen Lösungen 76
3.2.2 Nullstellenanzahl für zwei orthogonale Lösungen 79

4 Eigenschaften der Klassen K_{I} und K_{II} 101

4.1 Diskonjugiertheit 101
4.2 Charakterisierung der nichtoszillatorischen Lösungen als die nullstellenfreien Lösungen 110
4.3 Oszillation von (L) und (L^+) 112
4.4 Diskonjugiertheit an den Intervallgrenzen 113
4.5 Existenz von nullstellenfreien Lösungen 114
4.6 Analytischer Beweis der geometrischen Charakterisierung der Klasse $K_{\mathrm{I}} \cup K_{\mathrm{II}}$ durch die Spiralform der Integralkurve 116
4.6.1 Ein Hilfssatz zur Existenz einer Nullstelle bestimmter Lösungen 116
4.6.2 Definition und Wechselbeziehungen von maximalen Intervallen bestimmter Klassenzugehörigkeiten 119
4.6.3 Eigenschaften der Funktionen η und η_- 131
4.6.4 Analytische Definition der Klasse $K(J)$ zur Beschreibung der Spiralform der Integralkurve *C* 158
4.6.5 Übereinstimmung der Klasse $K(J)$ mit der Klasse $K_{\mathrm{I}}(J) \cup K_{\mathrm{II}}(J)$ 159

Literaturverzeichnis 179

Sachverzeichnis 183

Leseprobe – © Mediengruppe Westarp

1 Nullstellenverteilung bei komplexwertigen Lösungen und deren Ableitungen

Es wird die Verteilung der Nullstellen des Produkts $ww'w''$ für komplexwertige Lösungen w der homogenen linearen Differentialgleichung 3. Ordnung

(L) $$L[w] \equiv y''' + pw'' + qw' + rw = 0$$

im Intervall $J \subset \mathbb{R}$ untersucht. Die Endpunkte von J seien a und b ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$). Die Koeffizienten p, q, r seien in J komplexwertige und stetige Funktionen. Eine Lösung von (L) sei eine in J dreimal stetig differenzierbare komplexwertige Funktion w, welche in J die Gleichung $L[w] = 0$ erfüllt.

1.1 Hilfssätze

Bevor Resultate von Herold (1972) und Divakova (1970) verallgemeinert werden, wird mit Hilfssatz 1.1 eine Integralgleichung und mit Hilfssatz 1.2 eine Integralungleichung bereitgestellt. Der erste Hilfssatz wurde speziell für $f \equiv 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$ und reellwertiges w von Beesack (1956), S. 212, bewiesen.

Hilfssatz 1.1 Riccatische Differentialgleichung und Integralgleichung

Für die reellwertigen Funktionen $f, g \in C(]c,d[)$, $-\infty < c < d < \infty$, gelte $f > 0$,

$$f(x) = O\left(((x-c)(d-x))^{-\alpha}\right) \text{ und } g(x) = O\left(((x-c)(d-x))^{-\beta}\right)$$

mit reellen Zahlen α und β, $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \beta < 3$.[8] Die spezielle Riccatische Differentialgleichung[9]

$$R[\varphi] \equiv \varphi' + \frac{\varphi^2}{f(x)} + g(x) = 0$$

habe eine reellwertige Lösung $\varphi \in C^1(]c,d[)$ mit

$$\varphi(x) = O\left(((x-c)(d-x))^{-\gamma}\right)$$

mit einem $\gamma < 2$. Dann gilt für jede in $[c,d]$ stetige und stückweise stetig differenzierbare komplexwertige Funktion w mit

$$w(c) = w(d) = 0$$

die Integralgleichung

$$\int_c^d \left(f|w'|^2 - g|w|^2\right)dx = \int_c^d \frac{1}{f}|fw' - \varphi w|^2\,dx.$$

Bemerkung: Das rechte Integral ist bei positiver Funktion f immer nichtnegativ und es ist genau dann gleich Null, wenn $w = \lambda v$ in $]c,d[$ ist mit einem $\lambda \in \mathbb{C}$ und $v(x) = \exp\int \frac{\varphi}{f}dx$.

---

8 Das Landau-Symbol O (O-Notation, „groß O von … für den Grenzübergang …“) für den Vergleich der Größenordnung von Funktionen bei einem Grenzübergang wurde erstmals 1894 verwendet vom deutschen Zahlentheoretiker Paul Gustav Heinrich Bachmann (1837–1920) und bekannt gemacht vom deutschen Zahlentheoretiker Edmund Georg Hermann Landau (1877–1938).

9 Die Riccatische Differentialgleichung ist benannt nach dem italienischen Mathematiker Jacopo Francesco Riccati (1676–1754).

R. Pleier, *Über die Nullstellen der Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung 3. Ordnung* (Distribution of the zeros of solutions of the ordinary linear differential equation of third order), D-92694 Etzenricht, 1979/2020

Leseprobe – © Mediengruppe Westarp

Beweis von Hilfssatz 1.1: Die Riccatische Differentialgleichung $R[\varphi] = 0$ hat genau dann eine in ganz $]c,d[$ definierte und stetig differenzierbare reellwertige Lösung φ, wenn die homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

(1.1) $(fv')' + gv = 0$

eine in $]c,d[$ nullstellenfreie reellwertige Lösung v (v differenzierbar und fv' stetig differenzierbar) besitzt, wobei $\varphi = fv'/v$ bzw. $v = \exp\int \frac{\varphi}{f}dx$ ist (Coppel 1971, S. 6, Th. 3).

Gemäß dem Beweis des Hilfssatzes 1 von Herold (1972) gelten dann in jedem Teilintervall von $]c,d[$, in dem w stetig differenzierbar ist, mit einer reellwertigen Lösung $\varphi \in C^1(]c,d[)$ von $R[\varphi] = 0$ und der damit definierten nullstellenfreien Lösung $v = \exp\int \frac{\varphi}{f}dx$ von (1.1) die Umformungen

$$\left(\frac{|w|^2}{v}\right)' = -|w|^2\frac{v'}{v^2} + \frac{1}{v}(w'\overline{w} + w\overline{w}'),$$

$$-v'\left(\frac{|w|^2}{v}\right)' = \frac{1}{v^2}\left(v'^2|w|^2 - vv'(w'\overline{w} + w\overline{w}')\right),$$

$$|w'|^2 - v'\left(\frac{|w|^2}{v}\right)' = \frac{1}{v^2}\left(v^2|w'|^2 + v'^2|w|^2 - vv'w\overline{w}' - vv'w'\overline{w}\right)$$

$$= \frac{1}{v^2}(vw' - v'w)(v\overline{w}' - v'\overline{w}) = \frac{1}{v^2}|vw' - v'w|^2$$

$$= v^2\left|\left(\frac{w}{v}\right)'\right|^2,$$

$$f|w'|^2 = fv'\left(\frac{|w|^2}{v}\right)' + fv^2\left|\left(\frac{w}{v}\right)'\right|^2$$

$$= \left(fv'\frac{|w|^2}{v}\right)' - (fv')'\frac{|w|^2}{v} + fv^2\left|\left(\frac{w}{v}\right)'\right|^2 \qquad (fv'/v = \varphi,\ (fv')'/v = -g)$$

$$= \left(\varphi|w|^2\right)' + g|w|^2 + fv^2\left|\left(\frac{w}{v}\right)'\right|^2.$$

Da die Funktion f in $]c,d[$ nullstellenfrei vorausgesetzt ist (f ist positiv in $]c,d[$ oder negativ in $]c,d[$), folgt weiter

$$v\cdot\left(\frac{w}{v}\right)' = w' - \frac{wv'}{v} = \frac{1}{f}(fw' - \varphi w) \qquad (v'/v = \varphi/f),$$

$$fv^2\left|\left(\frac{w}{v}\right)'\right|^2 = \frac{1}{f}|fw' - \varphi w|^2$$

und

Leseprobe – © Mediengruppe Westarp

$$f|w'|^2 - g|w|^2 = \left(\varphi|w|^2\right)' + \frac{1}{f}|fw' - \varphi w|^2 .$$

Im offenen Intervall $]c,d[$ erhält man bei dem stetigen Integranden $f|w'|^2 - g|w|^2$ für die Stammfunktion bzw. das unbestimmte Integral die Gleichung

$$\text{(1.2)} \qquad \int\left(f|w'|^2 - g|w|^2\right)dx = \frac{fv'|w|^2}{v} + \int fv^2\left|\left(\frac{w}{v}\right)'\right|^2 dx$$

$$= \varphi|w|^2 + \int\frac{1}{f}|fw' - \varphi w|^2\, dx .$$

Aufgrund der vorausgesetzten Größenordnung der Funktionen f und g beim Grenzübergang $x \longrightarrow c$ ist der Quotient $f(x)/(x - c)^{-\alpha}$ beschränkt bzw. ist

$$|f(x)| \le M/(x - c)^{\alpha}$$

mit einer reellen Konstanten M. Da außerdem $|w'|^2$ in c stetig und damit beschränkt ist, gilt

$$|f(x)|\,|w'(x)|^2 \le K/(x - c)^{\alpha}$$

in einer Umgebung von c mit einer reellen Konstanten K. Da das sog. uneigentliche Intergal (mit unbeschränktem Integranden)

$$\int_c^{x_0}\frac{K}{(x-c)^{\alpha}}\,dx = \lim_{c_1\searrow c}\int_{c_1}^{x_0}K(x-c)^{-\alpha}\,dx = \lim_{c_1\searrow c}\left.\frac{K(x-c)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_{c_1}^{x_0} = \frac{K(x_0-c)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

als Grenzwert existiert ($c < c_1 < x_0 < d$, $1 - \alpha > 0$), konvergiert nach dem Majorantenkriterium[10] auch das dadurch majorisierte uneigentliche Integral

$$\int_c^{x_0} f|w'|^2\,dx .$$

Weiter ist beim Grenzübergang $x \longrightarrow c$ der Quotient $g(x)/(x - c)^{-\beta}$ beschränkt bzw.

$$|g(x)| \le \tilde{M}/(x-c)^{\beta}$$

in einer Umgebung von c mit einer reellen Konstanten $\tilde{M}$. Da außerdem w in c (rechtsseitig) differenzierbar und $w(c) = 0$ ist, ist

$$\lim_{x\searrow c}\frac{w(x) - 0}{(x-c)} = w'(c) \in \mathbb{C},$$

also in einer rechtsseitigen Umgebung von c der Quotient $w(x)/(x - c)$ beschränkt und $|w(x)| \le \tilde{K}\cdot(x-c)$ bzw.

$$|w(x)|^2 \le \tilde{K}^2\cdot(x-c)^2$$

mit einer reellen Konstanten $\tilde{K}$. Insgesamt gilt dann in einer Umgebung von c die Abschätzung

$$|g(x)|\,|w(x)|^2 \le \frac{\tilde{M}\tilde{K}^2}{(x-c)^{\beta-2}} .$$

Da das uneigentliche Intergal (mit unbeschränktem Integranden)

$$\int_c^{x_0}\frac{\tilde{M}\tilde{K}^2}{(x-c)^{\beta-2}}\,dx = \lim_{c_1\searrow c}\int_{c_1}^{x_0}\tilde{M}\tilde{K}^2(x-c)^{2-\beta}\,dx = \lim_{c_1\searrow c}\left.\frac{\tilde{M}\tilde{K}^2(x-c)^{3-\beta}}{3-\beta}\right|_{c_1}^{x_0} = \frac{\tilde{M}\tilde{K}^2(x_0-c)^{3-\beta}}{3-\beta}$$

als Grenzwert existiert ($c < c_1 < x_0 < d$, $3 - \beta > 0$), existiert nach dem Majorantenkriterium auch das dadurch majorisierte uneigentliche Integral

[10] Das Majorantenkriterium für die Existenz bzw. Konvergenz eines uneigentlichen Integrals bei nicht beschränktem Integranden findet man bei Mangoldt, Knopp (1975), Band 3, S. 479. Hans Karl Friedrich von Mangoldt (1854–1925) war ein deutscher Mathematiker und königlich preußischer Geheimer Regierungsrat. Konrad Theodor Hermann Knopp (1882–1957) war ein deutscher Mathematiker.

Leseprobe – © Mediengruppe Westarp

$$\int_c^{x_0} g|w|^2\, dx\,.$$

Da Analoges auch für die rechte Intervallgrenze d gilt, existiert insgesamt das uneigentliche Integral

$$\int_c^d \left(f|w'|^2 - g|w|^2\right) dx = \lim_{c_1 \searrow c} \int_{c_1}^{x_0} \left(f|w'|^2 - g|w|^2\right) dx + \lim_{d_1 \nearrow d} \int_{x_0}^{d_1} \left(f|w'|^2 - g|w|^2\right) dx\,.$$

Da für den Grenzübergang $x \longrightarrow c$ mit reellen Konstanten M^* und $\tilde{K}$ die Abschätzungen

$$|\varphi(x)| \le M^*(x\text{-}c)^{-\gamma}\,,\ |w(x)|^2 \le \tilde{K}^2 \cdot (x\text{-}c)^2$$

und somit

$$|\varphi(x)|\,|w(x)|^2 \le M^*\tilde{K}^2(x\text{-}c)^{2-\gamma}$$

gelten, konvergiert bei diesem Grenzübergang wegen $2 - \gamma > 0$ der erste Summand der rechten Seite von (1.2). Da auch die linke Seite von (1.2) konvergiert, gilt dies dann auch für den zweiten Summanden der rechten Seite. Da Analoges für den Grenzübergang $x \longrightarrow d$ gilt, erhält man für w die Integralgleichung

(1.3) $$\int_c^d \left(f|w'|^2 - g|w|^2\right) dx = \left[\varphi|w|^2\right]_c^d + \int_c^d \frac{1}{f}|fw' - \varphi w|^2\, dx\,.$$ □

Zu beachten ist, dass die Beziehung (1.3) auch für $f < 0$ in $]c,d[$ gilt. Dies wird beim Beweis des nachfolgenden Hilfssatzes 1.2, b) und von Satz 1.2, (3), (4), (5) benötigt.

Im Spezialfall, dass die Funktionen f, g und φ im gesamten Intervall J stetig sind, existieren für c, $d \in J$ die in (1.3) aufgeführten (eigentlichen) Integrale und der erste Summand der rechten Seite für beliebige Werte $w(c), w(d) \in \mathbb{C}$. Weiter ist die Existenz einer Lösung $\varphi \in C([c,d])$ der Dgl. $R[\varphi] = 0$ insbesondere dann gesichert, wenn die Dgl. (1.1) eine im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$ nullstellenfreie reellwertige Lösung v besitzt (Coppel 1971, S. 6, Th. 3). Die homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung (1.1) besitzt nun genau dann eine in $[c,d]$ nullstellenfreie reellwertige Lösung, wenn sie in $[c,d]$ diskonjugiert ist, d. h. wenn jede nichttriviale Lösung von (1.1) in $[c,d]$ höchstens eine Nullstelle hat (Coppel 1971, S. 5, Th.1). Damit kann der nachfolgende zweite Hilfssatz mit der Bereitstellung einer Integralungleichung bewiesen werden.

Hilfssatz 1.2 Integralungleichung

a) Es sei c, $d \in J$ mit $c < d$. Die reellwertigen Funktionen f und g seien in J stetig und es sei

$$f > 0 \text{ in } J.$$

Dann gilt für jede in $[c,d]$ stetige und stückweise stetig differenzierbare komplexwertige Funktion w mit $w \not\equiv 0$ in $[c,d]$ die Integralungleichung

(1.4) $$\int_c^d \left(f|w'|^2 - g|w|^2\right) dx > 0,$$

falls noch eine der folgenden drei Bedingungen erfüllt ist:

1) $w(c) = w(d) = 0$ und die homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung (1.1) ist in J diskonjugiert, besitzt also die Eigenschaft D = Diskonjugiertheit und somit in jedem abgeschlossenen Teilintervall $[c,d]$ eine nullstellenfreie Lösung v;
2) $w(c) = 0$ und (1.1) hat in J die Eigenschaft D^+:
   Zu jedem Teilintervall $[c,d] \subseteq J$ gibt es eine Lösung $v > 0$ in $[c,d]$ mit $v'(d) \ge 0$;
3) $w(d) = 0$ und (1.1) hat in J die Eigenschaft D^-:
   Zu jedem Teilintervall $[c,d] \subseteq J$ gibt es eine Lösung $v > 0$ in $[c,d]$ mit $v'(c) \le 0$.

Leseprobe – © Mediengruppe Westarp

b) Ist anstelle von $f > 0$ in J jetzt

$$f < 0 \text{ in } J,$$

so ist das in (1.4) angegebene Integral negativ,

$$\int_c^d \left(f|w'|^2 - g|w|^2 \right) dx < 0,$$

falls noch eine der oben in a) angegebenen Bedingungen erfüllt ist.

Beweis von Hilfssatz 1.2: a) 1) Wegen der Stetigkeit der Funktionen f, g, w und w' in $[c,d]$ existiert das Integral auf der linken Seite von (1.3). Aufgrund der Diskonjugiertheit von (1.1) in J und damit in $[c,d]$ existiert eine in $[c,d]$ nullstellenfreie Lösung v von (1.1) und dann mit $\varphi = fv'/v$ eine Lösung $\varphi \in C([c,d])$ der Dgl. $R[\varphi] = 0$. Wegen der Voraussetzung $w(c) = w(d) = 0$ verschwindet dann der erste Summand der rechten Seite von (1.3):

$$\left[\varphi |w|^2 \right]_c^d = 0.$$

Das Integral auf der rechten Seite von (1.3) existiert, ist nichtnegativ und von Null verschieden, da sonst $w = \lambda v$ in $]c,d[$ mit einem $\lambda \in \mathbb{C}$ und $v(x) = \exp \int \frac{\varphi}{f} dx$ $(\neq 0)$ gilt und dann $0 = w(c) = \lambda v(c)$, $\lambda = 0$, $w \equiv 0$ in $[c,d]$ folgt, im Widerspruch zur Voraussetzung. Demzufolge ist die rechte Seite von (1.3) positiv.

2) Aufgrund der Eigenschaft D^+ ist $\varphi = fv'/v \in C([c,d])$ eine Lösung von $R[\varphi] = 0$ mit

$$\varphi(d) = f(d)v'(d)/v(d) \geq 0.$$

Wegen $\varphi(c)\,|w(c)|^2 = 0$ und $\varphi(d)\,|w(d)|^2 \geq 0$ ist dann der erste Summand der rechten Seite von (1.3) nichtnegativ:

$$\left[\varphi |w|^2 \right]_c^d = \varphi(d)\,|w(d)|^2 - \varphi(c)\,|w(c)|^2 \geq 0.$$

Da $w \not\equiv 0$ in $[c,d]$ gilt, folgt wie in Beweisteil 1), dass der zweite Summand der rechten Seite von (1.3) und damit die gesamte rechte Seite von (1.3) positiv ist.

3) Der Beweis von 3) ergibt sich analog zu Beweisteil 2).

b) Der Beweis der Aussage b) für negatives f erfolgt analog zur Aussage a) für positives f. □

Bemerkungen zu den Eigenschaften D, D^+ und D^-:

1. Falls die Koeffizientenbedingungen

   $$f > 0 \text{ und } g \leq 0 \text{ in } J$$

   gelten, ist die Differentialgleichung (1.1) in J diskonjugiert (Eigenschaft D) und hat (1.1) in J die Eigenschaften D^+ und D^-.

2. Die Differentialgleichung (1.1) hat in J die Eigenschaft D^+ (bzw. D^-), falls $b \in J$ (bzw. $a \in J$),

   $$f > 0,\ g \geq 0 \text{ in } J$$

   ist und eine Lösung v von (1.1) existiert mit

   $$v'(b) = 0 \text{ (bzw. } v'(a) = 0) \text{ und } v \neq 0 \text{ in } J.$$

3. Die Differentialgleichung (1.1) hat in $J = [a,b[$ (bzw. $J =]a,b]$) die Eigenschaft D^+ (bzw. D^-), falls

   $$f > 0,\ g \geq 0 \text{ in } [a,b[\text{ (bzw. }]a,b]),$$

   $$\int_c^b \frac{dt}{f(t)} = \infty,\ g \not\equiv 0 \text{ in jedem } [c,b[\text{ (bzw. }]a,c]),$$

   $a < c < b$, und (1.1) in $]a,b[$ diskonjugiert ist (Coppel 1971, S. 14, Prop. 5).

Leseprobe – © Mediengruppe Westarp

Für reellwertiges w stimmt Hilfssatz 1.2, 1) überein mit L.1.12, Th.1.11 (i $\Rightarrow$ vi), Hilfssatz 1.2, 2) überein mit L.1.11 ($\Leftarrow$) und Hilfssatz 1.2, 2) in Verbindung mit Bemerkung 3 ($b = \infty$) überein mit Th.1.9 von Barrett (1969). Umgekehrt lassen sich aber auch aus den Aussagen für reellwertige w die entsprechenden für komplexwertige w folgern. Denn mit $w = w_1 + iw_2$, $w_1 = \operatorname{Re} w$, $w_2 = \operatorname{Im} w$, $i = \sqrt{-1}$ gilt in J $|w|^2 = w_1^2 + w_2^2$ und $|w'|^2 = w_1'^2 + w_2'^2$.

1.2 Hilfsformeln

Es werden jetzt einige Hilfsformeln angegeben, die für beliebige in J genügend oft stetig differenzierbare komplexwertige Funktionen h und w gelten und die für die Herleitung hinreichender Bedingungen für spezielle Nullstellenverteilungen der Lösungen von (L) verwendet werden können. Partielle Integration liefert

(1.5) $$\int h\bar{w}w'''dx = h\bar{w}w'' - \int h'\bar{w}w''dx - \int h\bar{w}'w''dx,$$

(1.6) $$\int h\bar{w}w''dx = h\bar{w}w' - \int h'\bar{w}w'dx - \int h|\bar{w}'|^2dx$$

und

$$\int h\bar{w}w'dx = h|w|^2 - \int h'|w|^2dx - \int h\bar{w}'wdx.$$

Aus der letzten Gleichung folgt

$$2\int h\operatorname{Re}(\bar{w}w')dx = h|w|^2 - \int h'|w|^2dx$$

und somit

(1.7) $$2\int h\bar{w}w'dx = h|w|^2 - \int h'|w|^2dx + 2i\int h\operatorname{Im}(\bar{w}w')dx.$$

Für Funktionen $w, s \in C^3(J)$, $p \in C^2(J)$, $q \in C^1(J)$, $r \in C(J)$ erhält man mit Hilfe der Beziehungen (1.5), (1.6) und (1.7)

$$\begin{aligned} 2\int s\bar{w}L[w]dx = & -s|w'|^2 - (-s''+(sp)'-sq)|w|^2 + 2s\bar{w}w'' + 2(sp-s')\bar{w}w' \\ & + \int(2sr-(sq)'+(sp)''-s''')|w|^2dx + \int(3s'-2sp)|w'|^2dx \\ & - 2\int is\operatorname{Im}(\bar{w}'w'')dx - 2\int i(-s''+(sp)'-sq)\operatorname{Im}(\bar{w}w')dx. \end{aligned}$$

Übergang zum Realteil liefert

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}\int s\bar{w}L[w]dx = & -F_s[w] + \int\left(f_0|w|^2 + f_1|w'|^2\right)dx \\ & + 2\int\operatorname{Im}s\operatorname{Im}(\bar{w}'w'')dx + 2\int\operatorname{Im}(-s''+(sp)'-sq)\operatorname{Im}(\bar{w}w')dx \end{aligned}$$

mit

$$F_s[w] = \operatorname{Re}\left[s|w'|^2 + (-s''+(sp)'-sq)|w|^2 - 2s\bar{w}w'' - 2(sp-s')\bar{w}w'\right]$$

und

$$f_0 = \operatorname{Re}[2sr-(sq)'+(sp)''-s'''],$$
$$f_1 = \operatorname{Re}[3s'-2sp].$$

Ist nun w eine Lösung von (L) (d. h. $L[w] \equiv 0$), s reellwertig ($\operatorname{Im} s \equiv 0$) und

Leseprobe – © Mediengruppe Westarp

$$\operatorname{Im}\left(-s''+(sp)'-sq\right) = s' \operatorname{Im} p + s \operatorname{Im}(p' - q) \equiv 0$$

in J, so gilt für $c, d \in J$

(1.8) $$F_s[w]\Big|_c^d = \int_c^d \left(f_0|w|^2 + f_1|w'|^2\right)dt\,.$$

Gelten nun noch im Intervall J die Vorzeichenbedingungen

$$f_1 \geq 0, f_0 \geq 0 \qquad (\text{bzw. } f_1 \leq 0, f_0 \leq 0),$$

so ist für jede nichttriviale Lösung w von (L) gemäß (1.8) die Funktion $F_s[w](x)$ in J monoton steigend (bzw. monoton fallend) und so gibt es insbesondere keine $c, d \in$ J mit $c < d$ und

$$F_s[w](c) > 0 \geq F_s[w](d) \quad (\text{bzw. } F_s[w](c) < 0 \leq F_s[w](d))$$

oder

$$F_s[w](c) \geq 0 > F_s[w](d) \quad (\text{bzw. } F_s[w](c) \leq 0 < F_s[w](d)).$$

Im Folgenden soll die **Schreibweise**

$$f_0 \underset{\cdot}{>} 0 \quad (\text{bzw. } f_0 \underset{\cdot}{<} 0)$$

mit dem **Symbol** $\underset{\cdot}{>}$ bzw. $\underset{\cdot}{<}$ bedeuten, dass $f_0 \geq 0$ (bzw. $f_0 \leq 0$) und $f_0 \not\equiv 0$ in jedem Teilintervall von J ist.

Gelten in J die stärkeren Vorzeichenbedingungen

$$f_1 \geq 0 \text{ und } f_0 \underset{\cdot}{>} 0 \quad (\text{bzw. } f_1 \leq 0 \text{ und } f_0 \underset{\cdot}{<} 0)$$

und ist $]c,d[\, \subseteq J$ ein beliebiges offenes Intervall, so ist für jede nichttriviale Lösung w von (L) wegen der Stetigleit zunächst $|w(x)|^2 > 0$ in einer Umgebung $U(x_0)$ einer Stelle $x_0 \in\,]c,d[$. Wegen der Stetigkeit von f_0 ist dann auch $f_0 > 0$ ($f_0 < 0$) in einer Umgebung $U(x_1) \subseteq U(x_0)$ einer Stelle $x_1 \in U(x_0)$. Weiter ist dann $f_0|w(x)|^2 > 0$ (< 0) in $U(x_1)$ und somit der Integrand $f_0|w|^2 + f_1|w'|^2 \not\equiv 0$ in $]c,d[$. Daher ist die Funktion $F_s[w](x)$ in J streng monoton steigend (bzw. streng monoton fallend). Es gibt also insbesondere keine Stellen $c, d \in J$ mit $c < d$ und

$$F_s[w](c) \geq 0 \geq F_s[w](d) \quad (\text{bzw. } F_s[w](c) \leq 0 \leq F_s[w](d)).$$

Die Vorzeichenbedingungen für $F_s[w]$ lassen sich nun in Vorzeichenbedingungen für w, w', w'' und Ausdrücke von s, p, q und r übertragen. Für jede nichttriviale Lösung w von (L) und jedes $x_0 \in J$ ist nämlich

$F_s[w](x_0) = 0$, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

a) $w(x_0) = w'(x_0) = 0$;

b) $w'(x_0) = w''(x_0) = 0$ und $-s''+(sp)'-sq \equiv 0$;

$F_s[w](x_0) \geq 0$ (>), falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

c) $w'(x_0) = w''(x_0) = 0$ und $-s''+(sp)'-sq \geq 0$ (>);

d) $w(x_0) = 0$ und $s \geq 0$;

e) $w''(x_0) = 0$ und $s(x) = \exp\int p(x)dx =: \sigma(x)$ (wobei hier sogar $p \in C(J)$ genügt), p, q reellwertig, $q \leq 0$ (<);

$F_s[w](x_0) \leq 0$ (<), falls

f) $w'(x_0) = w''(x_0) = 0$ und $-s''+(sp)'-sq \leq 0$ (<).

Leseprobe – © Mediengruppe Westarp

1.3 Nullstellenverteilung der Lösungen für komplexwertige Koeffizienten

Mit den eben durchgeführten Betrachtungen zur Monotonie von $F_s[w]$ in J und zum Vorzeichen von $F_s[w](x_0)$ ergeben sich die drei nachfolgenden Sätze über die Nullstellenverteilung der Lösungen von (L).

Satz 1.1 Ausschluss bestimmter Nullstellenkonfigurationen
a) Für die komplexwertigen Koeffizienten $p \in C^2(J)$, $q \in C^1(J)$, $r \in C(J)$ von (L) seien mit einer reellwertigen Funktion $s \in C^3(J)$ in J die Gleichung

(1.9) $$s' \cdot \operatorname{Im} p + s \cdot \operatorname{Im}(p' - q) \equiv 0$$

und mit den Funktionen

$$f_0 = \operatorname{Re}\left[2sr - (sq)' + (sp)'' - s'''\right],$$
$$f_1 = \operatorname{Re}\left[3s' - 2sp\right]$$

die unten noch jeweils angegebenen Bedingungen erfüllt. Dann gibt es für jede nichttriviale Lösung w von (L) keine Stellen $c, d \in J$ mit $c < d$ und einer der folgenden Eigenschaften:

(1) $w(c) = w'(c) = 0 = w(d) = w'(d)$, $\quad f_0 \gneq 0, f_1 \geq 0$;

(2) $w(c) = w'(c) = 0 = w'(d) = w''(d)$, $\quad f_0 \gneq 0\ (\geq), f_1 \geq 0$, $-s''+(sp)'-sq \leq 0\ (<)$;

(3) $w'(c) = w''(c) = 0 = w'(d) = w''(d)$, $\quad -s''+(sp)'-sq \equiv 0, f_0 = s \operatorname{Re} r \gneq 0, f_1 \geq 0$;

(4) $w(c) = w'(c) = 0 = w(d)$, $\quad f_0 \lneq 0, f_1 \leq 0, s \geq 0$;

(5) $w'(c) = w''(c) = 0 = w(d)$, $\quad f_0 \lneq 0\ (\leq), f_1 \leq 0, s \geq 0$, $-s''+(sp)'-sq \leq 0\ (<)$.

b) Sind für reellwertige $p \in C(J)$, $q \in C^1(J)$, komplexwertiges $r \in C(J)$, $s = \sigma := \exp\int p(x)dx$ und damit $f_0 = \sigma \cdot [2 \operatorname{Re} r - pq - q']$, $f_1 = \sigma \cdot p$, $F_s[w] = \sigma \cdot [\,|w'|^2 - q\,|w|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{w}w'')]$ die jeweils angegebenen Bedingungen erfüllt, dann gibt es für keine nichttriviale Lösung w von (L) Stellen $c, d \in J$ mit $c < d$ und einer der folgenden Eigenschaften:

(6) $w(c) = w'(c) = 0 = w''(d)$, $\quad 2 \operatorname{Re} r - q' - pq \lneq 0\ (\leq), p \leq 0, q \leq 0\ (<)$;

(7) $w'(c) = w''(c) = 0 = w''(d)$, $\quad \operatorname{Re} r \lneq 0, p \leq 0, q \equiv 0$.

Bemerkung: Falls $r \not\equiv 0$ in jedem Teilintervall von J ist, kann die Bedingung

$$f_0 \gneq 0, f_1 \geq 0 \qquad (\text{bzw. } f_0 \lneq 0, f_1 \leq 0)$$

durch

$$f_0 \geq 0, f_1 \geq 0, f_0 + f_1 \gneq 0 \qquad (\text{bzw. } f_0 \leq 0, f_1 \leq 0, f_0 + f_1 \lneq 0)$$

ersetzt werden, da in diesem Fall für jede nichttriviale Lösung w von (L) sowohl w als auch die Ableitung w' in keinem Teilintervall identisch verschwindet: Wäre nämlich $w' \equiv 0$ in einem offenen Teilintervall $J' \subseteq J$, dann ist $w'' \equiv 0$ und $w''' \equiv 0$ in J' und $w(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in J'$. Durch Wahl des Teilintervalls J' gilt o. E. (ohne Einschränkung der Allgemeinheit) auch schon in diesem Intervall $w \neq 0$, $rw = L[w] \equiv 0$ und somit $r \equiv 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Somit ist unter diesen Voraussetzungen der Integrand $f_0|w|^2 + f_1|w'|^2 \gneq 0$ (bzw. $\lneq 0$) in J und das Integral auf der rechten Seite von (1.8) positiv (bzw. negativ).

Speziell für $p \equiv q \equiv 0$, $s \equiv 1$ ($f_0 = 2 \operatorname{Re} r$, $f_1 = 0$, $F_1[w] = |w'|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{w}w'')$) ergeben (4), (5), (6), (7) die Aussage 1 und mittels der Substitution $x = -t$ auch die Aussage 2 des Satzes 1 von Herold (1972).

Leseprobe – © Mediengruppe Westarp

Anstatt die Positivität (bzw. Negativität) des Integrals in (1.8), also

$$F_s[w](d) - F_s[w](c) = \int_c^d \left(f_1 |w'|^2 + f_0 |w|^2 \right) dt > 0 \text{ (bzw. } < 0) \text{ für } c < d,$$

$c, d \in J$, durch die in Satz 1.1 verwendeten Vorzeichenbedingungen $f_1 \geq 0, f_0 \gneq 0$ (bzw. $f_1 \leq 0, f_0 \lneq 0$) zu sichern, kann das Vorzeichen des Integrals auch mittels Hilfssatz 1.2, also hier durch Eigenschaften ($f_1 > 0$ bzw. $f_1 < 0$, D, D^+, D^-) der homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung

(1.10) $(f_1 v')' - f_0 v = 0$

und durch die Bedingung $w(c) = 0$ oder $w(d) = 0$ festgelegt werden. Nur für die Kriterien (3) und (7) von Satz 1.1 lassen sich hiermit keine analogen aufstellen, da bei diesen nicht $w(c) = 0$ oder $w(d) = 0$ gesichert ist. Bei der Formulierung des damit resultierenden Satzes 1.2 wird die Voraussetzung, dass die Differentialgleichung (1.10) in J die Eigenschaft D (= Diskonjugiertheit), D^+ bzw. D^- hat, abgekürzt angegeben durch D(1.10), D^+(1.10) bzw. D^-(1.10). Beim Beweis der Kriterien (1) und (2) von Satz 1.2 ist das in (1.8) angegebene Integral positiv und für die auszuschließenden Stellen $c, d \in J$ der Term $F_s[w]\big|_c^d$ jedoch nichtpositiv. Beim Beweis der Kriterien (3), (4) und (5) ist das Integral negativ und der Term $F_s[w]\big|_c^d$ nichtnegativ.

Satz 1.2 Ausschluss bestimmter Nullstellenkonfigurationen

a) Für die komplexwertigen Koeffizienten $p \in C^2(J)$, $q \in C^1(J)$, $r \in C(J)$ von (L), eine reellwertige Funktion $s \in C^3(J)$, die Funktionen $f_0 = \mathrm{Re}\left[2sr - (sq)' + (sp)'' - s'''\right]$ und $f_1 = \mathrm{Re}\left[3s' - 2sp\right]$ und die Differentialgleichung (1.10) seien in J die Bedingung (1.9) $s' \cdot \mathrm{Im}\, p + s \cdot \mathrm{Im}(p' - q) \equiv 0$ und die nachfolgend jeweils noch angegebenen Voraussetzungen erfüllt. Dann gibt es für jede nichttriviale Lösung w von (L) keine Stellen $c, d \in J$ mit $c < d$ und einer der folgenden Eigenschaften:

(1) $w(c) = w'(c) = 0 = w(d) = w'(d)$, $f_1 > 0$, D(1.10);

(2) $w(c) = w'(c) = 0 = w'(d) = w''(d)$, $f_1 > 0$, D^+(1.10), $-s'' + (sp)' - sq \leq 0$;

(3) $w(c) = w'(c) = 0 = w(d)$, $f_1 < 0$, D(1.10), $s \geq 0$;

(4) $w'(c) = w''(c) = 0 = w(d)$, $f_1 < 0$, D^-(1.10), $s \geq 0$, $-s'' + (sp)' - sq \leq 0$.

b) Sind für reellwertige $p \in C(J)$, $q \in C^1(J)$, komplexwertiges $r \in C(J)$ und das spezielle $s = \sigma = \exp\int p(x)dx$ ($f_0 = \sigma \cdot [2\,\mathrm{Re}\, r - pq - q']$, $f_1 = \sigma \cdot p$) die unten noch angegebenen Bedingungen erfüllt, dann gibt es für keine nichttriviale Lösung w von (L) Stellen $c, d \in J$ mit $c < d$ und der folgenden Eigenschaft:

(5) $w(c) = w'(c) = 0 = w''(d)$, $s = \sigma$, $p < 0$, D^+(1.10), $q \leq 0$.

Speziell für $p \equiv q \equiv 0$, $s(x) = x - a$ bzw. $s(x) = x - k$ ($k \in \mathbb{R}$) in $J = [a,b[$ ergibt (3) mit der Substitution $x = -t$ den Satz 2a und (1) den Satz 2b von Herold (1972).

1.4 Nullstellenfreiheit der komplexwertigen Produktfunktion $ww'w''$

Es werden jetzt noch hinreichende Kriterien dafür hergeleitet, dass für eine Lösung w von (L) die Produktfunktion

$$(ww'w'')(x) \neq 0 \text{ für alle } x > x_0 \ (x < x_0),\ x, x_0 \in J,$$

ist. Es sei in J wieder s reellwertig und die Bedingung (1.9) $s' \cdot \mathrm{Im}\, p + s \cdot \mathrm{Im}(p' - q) \equiv 0$ erfüllt.

Leseprobe – © Mediengruppe Westarp

Ist $f_0 \underset{\cdot}{<} 0, f_1 \leq 0$ (bzw. $f_0 \underset{\cdot}{>} 0, f_1 \geq 0$) in J und w eine nichttriviale Lösung von (L) mit $F_s[w](x_0) \leq 0$ ($x_0 \in J$), so folgt für die gemäß (1.8) streng monoton fallende (bzw. streng monoton steigende) Funktion $F_s[w](x)$ die Ungleichung

$$F_s[w](x) < 0 \text{ für } x > x_0 \ (x < x_0),\ x \in J.$$

Gilt andererseits $f_1 < 0$, $D^+(1.10)$ ($f_1 > 0$, $D^-(1.10)$) und ist w eine nichttriviale Lösung von (L) mit $w(x_0) = 0$ und $F_s[w](x_0) \leq 0$, so folgt mit Hilfssatz 1.2 aus (1.8) ebenfalls

$$F_s[w](x) < 0 \text{ für } x > x_0 \ (x < x_0),\ x \in J.$$

Setzt man noch speziell $s = \sigma = \exp\int p(x)dx$, p reellwertig und

$$-s''+(sp)'-sq = -\sigma q \geq 0,$$

also $q \leq 0$ voraus, so bekommt man für $x > x_0$ ($x < x_0$) die Ungleichung

$$0 > F_s[w](x) = \sigma(x)\cdot[\,|w'|^2 - q\,|w|^2 - 2\mathrm{Re}(\overline{w}w'')](x) \geq -2\sigma(x)\,\mathrm{Re}(\overline{w}\,w'')(x)$$

und somit $\mathrm{Re}(\overline{w}\,w'')(x) > 0$ und $(ww'')(x) \neq 0$.
Daraus folgt weiter

$$\mathrm{Re}(\overline{w}\,w')'(x) = |w'(x)|^2 + \mathrm{Re}(\overline{w}\,w'')(x) > 0$$

für $x > x_0$ ($x < x_0$)), $x \in J$, sodass $\mathrm{Re}(\overline{w}\,w')$ und dann auch w' höchstens eine Nullstelle im Intervall $J \cap \{x \geq x_0\}$ ($J \cap \{x \leq x_0\}$). Im Fall $w'(x_0) = 0$ hat w' und dann insgesamt $ww'w''$ keine Nullstelle in $J \cap \{x > x_0\}$ ($J \cap \{x < x_0\}$).

Speziell für $s = \sigma$ ist

$$-s''+(sp)'-sq = -\sigma q,$$
$$f_0 = \sigma\cdot[2\,\mathrm{Re}\,r - pq - q'] \text{ und}$$
$$f_1 = \sigma\cdot p.$$

Weiter ist stets $F_s[w](x_0) = 0$ im Falle $w(x_0) = w'(x_0) = 0$. Im Spezialfall $s = \sigma$ ist unter der Voraussetzung $q \equiv 0$ ($-s''+(sp)'-sq = -\sigma q \equiv 0$, $f_0 = 2\sigma\,\mathrm{Re}\,r$) noch $F_s[w](x_0) \leq 0$ im Falle $w'(x_0) = w''(x_0) = 0$. Damit erhält man den folgenden Satz, der insbesondere Verstärkungen der Aussagen von Satz 1.1 (6), Satz 1.2 (5) und Satz 1.1 (7) gibt.

Satz 1.3 Nullstellenfreiheit der Produktfunktion $ww'w''$
Es seien die Koeffizienten $p \in C(J)$, $q \in C^1(J)$ reellwertig und $r \in C(J)$ komplexwertig. Für die nichttriviale Lösung w von (L) gilt

$$(ww'w'')(x) \neq 0$$

für alle $x > x_0$ ($x < x_0$), $x, x_0 \in J$, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(1) $w(x_0) = w'(x_0) = 0$, $\quad s = \sigma$, $2\,\mathrm{Re}\,r - pq - q' \underset{\cdot}{<} 0$ ($\underset{\cdot}{>}$), $p \leq 0$ ($\geq$), $q \leq 0$;

(2) $w(x_0) = w'(x_0) = 0$, $\quad s = \sigma$, $p < 0$ ($>$), $D^+(1.10)$ ($D^-(1.10)$), $q \leq 0$;

(3) $w'(x_0) = w''(x_0) = 0$, $\quad s = \sigma$, $\mathrm{Re}\,r \underset{\cdot}{<} 0$ ($\underset{\cdot}{>}$), $p \leq 0$ ($\geq$), $q \equiv 0$.

Zu den Bedingungen (1) und (2) vergleiche man die von Divakova (1970) in Th.1 und Th.2 für $p \equiv q \equiv 0$ auf Strecken bzw. Gebieten in der komplexen Ebene aufgestellten Kriterien.

Leseprobe – © Mediengruppe Westarp

1.5 Nullstellenverteilung der reellwertigen Lösungen bei reellwertigen Koeffizienten

Sind die Koeffizienten p, q, r von (L) reellwertig und ist $y = u_2(.,c)$ die Lösung von (L) mit der Anfangsbedingung

$$y(c) = y'(c) = 0,\ y''(c) = 1,$$

so gilt $y > 0$ in $]c,b] \cap J$, falls die in Satz 1.1 (4) oder Satz 1.2 (3) gegebenen Bedingungen erfüllt sind. Die Bedingungen von Satz 1.1 (4) lauten speziell

für $s = \sigma^{2/3}$: $\quad 2r - q' - \frac{2}{3}pq + \frac{4}{27}p^3 + \frac{2}{3}pp' + \frac{1}{3}p'' \underset{\cdot}{<} 0$;

für $s = \sigma$: $\quad p \leq 0,\ 2r - pq - q' \underset{\cdot}{<} 0$;

für $s \equiv 1$: $\quad p \geq 0,\ 2r - q' + p'' \underset{\cdot}{<} 0$ (für $s \equiv 1$, $p \equiv 0$ siehe Hanan (1961), Th.2.2).

Weiter gilt für die spezielle Lösung $y = u_2(.,c)$

$$yy' > 0 \text{ in }]c,b] \cap J,$$

falls mit einer Funktion $s \in C^3(J)$ in J

$$s > 0,\ f := -s'' + (sp)' - sq \geq 0$$

gilt und eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(1) $f_1 \leq 0,\ f_0 \underset{\cdot}{<} 0$,

(2) $f_1 < 0$, $D^+(1.10)$.

Zum Beweis zeigt man mittels $F_s[y](x)$, dass $(yy'')(x) > 0$ in allen $x \in J$, $x >$ c, mit $y'(x) = 0$ gilt.

Analog erhält man Bedingungen dafür, dass $(yy'')(x) < 0$ in allen Nullstellen x von y' in $]c,b] \cap J$ gilt und somit sich die Nullstellen von y und y' in $]c,b] \cap J$ trennen: Für die reellwertige Lösung y von (L) gelte dazu mit einem $s \in C^3(J)$

$$s > 0,\ f \leq 0 \text{ und}$$

(1) $f_1 \geq 0,\ f_0 \underset{\cdot}{>} 0,\ F_s[y](c) \geq 0$ oder

(2) $f_1 > 0$, $D^+(1.10)$, $y(c) = 0$.

(Zu (1) für $s \equiv 1$, $p \equiv 0$ und damit $f = -q$, $f_1 = 0$, $f_0 = 2r - q'$ siehe Hanan (1961), S.937.)

Ferner gilt für die spezielle Lösung $y = u_2(.,c)$ in $]c,b] \cap J$ $yy'y'' > 0$, falls mit einem $s \in C^3(J)$ in J

$$s > 0,\ f \geq 0,\ s' - sp \geq 0 \text{ und}$$

(1) $f_1 \leq 0,\ f_0 \leq 0$ oder

(2) $f_1 < 0$, $D^+(1.10)$

erfüllt ist. Zum Beweis zeigt man mittels $F_s[y](x)$, dass aus $yy' > 0$ in $]c,d]$ $y''(d) > 0$ folgt. Speziell für $s = \sigma$ stimmen diese Bedingungen überein mit denen von Satz 1.3 (1), (2) für reellwertiges r.

1.6 Weitere Bedingungen zur Nullstellenverteilung der Lösungen für komplexwertige Koeffizienten

Weitere Kriterien über die Nullstellenverteilung bei den Lösungen von (L) kann man in gleicher Weise gewinnen, wenn man (L) mit $s\overline{w}^{(k)}$ $(k = 1, 2, 3)$ multipliziert. Integration und Übergang zum Realteil liefern dann die Beziehungen

Leseprobe – © Mediengruppe Westarp

(1.11) $$2\,\mathrm{Re}\int s\,\overline{w}\,'L[w]dx = G_s[w] - \int\left(g_0|w|^2 + g_1|w'|^2 + g_2|w''|^2\right)dx$$
$$- 2\int\left(\mathrm{Im}(sr)\,\mathrm{Im}(w\overline{w}') + \mathrm{Im}(sp - s')\,\mathrm{Im}(\overline{w}'w'')\right)dx$$

mit

$$G_s[w] = \mathrm{Re}\left[sr|w|^2 + (sp - s')|w'|^2 + 2s\overline{w}'w''\right],$$
$$g_0 = \mathrm{Re}(sr)',\ g_1 = \mathrm{Re}(-s''+(sp)'-2sq),\ g_2 = 2\,\mathrm{Re}\,s;$$

(1.12) $$2\,\mathrm{Re}\int s\,\overline{w}\,''L[w]dx = H_s[w] - \int\left(h_0|w|^2 + h_1|w'|^2 + h_2|w''|^2\right)dx$$
$$-2\int\left(\mathrm{Im}\,s\,\mathrm{Im}(w'''\overline{w}'') + \mathrm{Im}(sq)\,\mathrm{Im}(w'\overline{w}'') - \mathrm{Im}(sr)'\,\mathrm{Im}(w\overline{w}')\right)dx$$

mit

$$H_s[w] = \mathrm{Re}\left[-(sr)'|w|^2 + sq|w'|^2 + s|w''|^2 + 2srw\overline{w}'\right],$$
$$h_0 = -\,\mathrm{Re}(sr)'',\ h_1 = \mathrm{Re}(2sr + (sq)'),\ h_2 = 2\,\mathrm{Re}(s' - 2sp);$$

(1.13) $$2\,\mathrm{Re}\int s\,\overline{w}\,'''L[w]dx = K_s[w] - \int\left(k_0|w|^2 + k_1|w'|^2 + k_2|w''|^2 + k_3|w'''|^2\right)dx$$
$$- 2\int\left(\mathrm{Im}(sp)\,\mathrm{Im}(w''\overline{w}''') + \mathrm{Im}\left((sq)' + sr\right)\mathrm{Im}(\overline{w}'w'') + \mathrm{Im}(sr)''\,\mathrm{Im}(w\overline{w}')\right)dx$$

mit

$$K_s[w] = \mathrm{Re}\left[(sr)''|w|^2 - \left((sq)' + sr\right)|w'|^2 + sp|w''|^2 - 2(sr)'w\overline{w}' + 2srw\overline{w}'' + 2sqw'\overline{w}''\right],$$
$$k_0 = \mathrm{Re}(sr)''',\ k_1 = -\,\mathrm{Re}((sq)'+sr),\ k_2 = \mathrm{Re}((sp)' + 2sq),\ k_3 = -\,2\,\mathrm{Re}\,s.$$

Andere Bedingungen zur Nullstellenverteilung der Lösungen für komplexwertige Koeffizienten

Andere Koeffizientenbedingungen erhält man, wenn man beispielsweise in der (durch Modifikation von (1.11) erhaltenen) Beziehung

$$2\,\mathrm{Re}\int s\,\overline{w}\,'L[w]dx = \hat{G}_s[w] - \int\left(g_0|w|^2 - 2\,\mathrm{Re}(sq)|w'|^2 + g_2|w''|^2\right)dx$$
$$+ 2\int\mathrm{Re}\left((sp - s')\overline{w}'w''\right)dx - 2\int\mathrm{Im}(sr)\,\mathrm{Im}(w\overline{w}')dx$$

mit

$$\hat{G}_s[w] = \mathrm{Re}\left[sr|w|^2 + 2s\overline{w}'w''\right]$$

statt der wieder auf (1.11) führenden Anwendung von (1.7) auf das zweite Integral der rechten Seite nun den Integranden folgendermaßen umformt:

Mit $sp - s' = \psi_1\cdot\psi_2$ gilt

$$2\,\mathrm{Re}\left((sp - s')\overline{w}'w''\right) = 2\,\mathrm{Re}\left(\psi_1\overline{w}'\cdot\psi_2 w''\right) = |\psi_1|^2|w'|^2 + |\psi_2|^2|w''|^2 - |\overline{\psi}_1 w' - \psi_2 w''|^2$$

und daher

(1.14) $$2\,\mathrm{Re}\int s\,\overline{w}\,'L[w]dx = \hat{G}_s[w] - \int\left(g_0|w|^2 - \left(2\,\mathrm{Re}(sq) + |\psi_1|^2\right)|w'|^2 + \left(g_2 - |\psi_2|^2\right)|w''|^2\right)dx$$
$$+ 2\int\mathrm{Re}\left((sp - s')\overline{w}'w''\right)dx - 2\int\mathrm{Im}(sr)\,\mathrm{Im}(w\overline{w}')dx\,.$$

Um diese zu (L) gehörigen Beziehungen mit den entsprechenden für die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

(l) $$v'' + pv' + qv = 0$$

zu vergleichen, setzt man $r \equiv 0$ und $w' = v$. So bekommt man beispielsweise aus (1.11) für $s \equiv \lambda - i\mu$ ($\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$), $p \equiv 0$, $q = q_1 + iq_2$ die modifizierte Greensche Transformierte von Beesack (1956), S. 213, und aus (1.14) für $s \equiv (1 - i\gamma)/2$ ($\gamma \in \mathbb{R}$), $\psi_2 \equiv 1$, $\psi_1 = sp$, $q = q_1 + iq_2$ die Gleichung (4) von Herold (1971), S. 292.

Leseprobe – © Mediengruppe Westarp

1.7 Weitere Bedingungen zur Nullstellenverteilung der reellwertigen Lösungen bei reellwertigen Koeffizienten

Für reellwertige Koeffizienten p, q, r von (L) kann man zur Gewinnung von Kriterien über die Nullstellenverteilung der Lösungen von (L) auch noch die folgenden für Lösungen y von (L), $c, d \in J$ und $s \in C^k(J)$ ($k = 2$ bzw. $k = 3$) geltenden Beziehungen verwenden:

(1.15) $$y''' = -py'' - qy' - ry$$

(siehe Kim (1970), L.1, L.2, und Ahmad, Lazer (1969), L.1).

Mit $f := y' - y$ gilt

(1.16) $$\begin{aligned} f'' &= -(p+1)y'' - qf - (q+r)y, \\ y''' &= -py'' - qf - (q+r)y \end{aligned}$$

(siehe Villari[11] (1958), S.77).

Mit $g := y'' - y'$ gilt

(1.17) $$\begin{aligned} g' &= -(p+1)g - (p+1+q)y' - ry, \\ y''' &= -pg - (p+q)y' - ry. \end{aligned}$$

Mit $h := y'' - y$ gilt

(1.18) $$\begin{aligned} h' &= -ph - (q+1)y' - (p+r)y, \\ y''' &= -ph - qy' - (p+r)y. \end{aligned}$$

Aus $\sigma \cdot L[y] = 0$ mit $\sigma = \exp\int p dx$ ergibt sich

(1.19) $$(\sigma y'')' = -\sigma q y' - \sigma r y$$

(siehe Etgen, Shih (1973b), S. 153, Kim (1970), Cor.1).

Mit $\tilde{G}_s[y] = (sp - s')y'^2 + 2sy'y''$ und $g_1 = -s'' + (sp)' - 2sq$ (s reellwertig) gilt

(1.20) $$0 = 2\int_c^d sy'L[y]dx = \tilde{G}_s[y]\Big|_c^d - \int_c^d \left(g_1 y'^2 + 2sy''^2\right)dx + 2\int_c^d sryy'dx$$

(für $s \equiv 1$, $p \equiv 0$ und damit $\tilde{G}_s[y] = 2y'y''$, $g_1 = -2q$ siehe Hanan (1961), L.2.4).

Mit $E_s[y] = sy'' + (sp - s')y' + (sq - (sp)' + s'')y = B[y,s]$ und $e_0 = -sr + (sq)' - (sp)'' + s''' = L^+[s]$ (s reellwertig) gilt

(1.21) $$0 = 2\int_c^d sL[y]dx = E_s[y]\Big|_c^d - \int_c^d e_0 y dx$$

(für $s \equiv 1$ und damit $E_1[y] = y'' + py' + (q - p')y$, $e_0 = -r + q' - p''$ siehe Etgen, Shih (1973b), S. 153).

Mit $\tilde{E}_s[y] = sy' + (sp - 2s')y$ und $e_1 = -3s'' + 2(sp)' - sq$ gilt

(1.22) $$\tilde{E}_s[y]\Big|_c^d - \int_c^d e_1(x)y(x)dx - (d-c)E_s[y](c) = \int_c^d E_s[y]\Big|_c^x dx = \int_c^d\int_c^x e_0(t)y(t)dtdx$$
$$= \int_c^d (d-t)e_0(t)y(t)dt\,.$$

Mit $e_2 = 3s' - sp$ gilt

[11] Gaetano Villari (1923–2014) war ein italienischer Mathematiker und ordentlicher Professor an der Universität Florenz, der sich mit Approximationstheorie, Spezialfunktionen und gewöhnlichen Differentialgleichungen befasste. Quelle: Marini, Mawhin (2014).

Leseprobe – © Mediengruppe Westarp

(1.23) $$[sy]_c^d - \int_c^d e_2(x)y(x)dx - (d-c)\,\tilde{E}_s[y](c) = \int_c^d \tilde{E}_s[y]\Big|_c^x dx$$

$$= \int_c^d (x-c)E_s[y](c)dx + \int_c^d\int_c^x \big(e_1(t)+(x-t)e_0(t)\big)\,y(t)dtdx$$

$$= \tfrac{1}{2}(d-c)^2 E_s[y](c) + \int_c^d \Big((d-t)e_1(t)+\tfrac{1}{2}(d-t)^2 e_0(t)\Big)\,y(t)dt\,.$$

Weitere Eigenschaften von Lösungen

Mittels der in den Abschnitten 1.2 und 1.6 definierten Operatoren F_s, G_s, H_s, K_s lassen sich auch hinreichende Bedingungen dafür herleiten, dass

- für jede in $J = [a,b[$ oszillatorische (nichttriviale) Lösung y von (L) der Grenzwert
  $$\lim_{x\to b} y^{(j)}(x)$$
  der j-ten Ableitung nicht existiert ($j \in \{0,1,2\}$; siehe etwa Lazer (1966), L.1.4, und die Beweise von Greguš (1963), Satz 3 und Lazer (1966), Th.3.6),
- für jede in $J = [a,b[$ oszillatorische Lösung y von (L) die j-te Ableitung
  $$y^{(j)} \text{ in } J = [a,b[\text{ beschränkt}$$
  ist ($j \in \{0,1\}$; siehe etwa Lazer (1966), L.1.4 und L.2.3),
- für die Lösung y von (L) die j-te Ableitung
  $$y^{(j)} \text{ in } J = [a,b[\text{ quadratisch integrierbar}$$
  ist ($j \in \{0,1,2,3\}$; siehe etwa die Beweise von Lazer (1966) für Th.2.4 und Th.3.6) oder
- für die Lösung y von (L) der Grenzwert der j-ten Ableitung gleich Null ist:
  $$\lim_{x\to\infty} y^{(j)}(x) = 0$$
  ($j \in \{0,1,2\}$; siehe etwa die Beweise von Lazer (1966) für Th.2.4 und Th.3.6). Beim Beweis von Lazers Th.3.6 wird speziell für $s \equiv 1$, $p \equiv 0$ und damit $F_1[y] = y'^2 - qy^2 - 2yy''$, $E_1[y] = y'' + qy$ noch die folgende Beziehung verwendet:

  (1.24) $$sy'^2 = F_s[y] + \Big(2E_s[y] + \big(-s'' + (sp)' - sq\big)y\Big)\cdot y\,.$$

Leseprobe – © Mediengruppe Westarp