Theory of Bound-Geodesics of Kerr-SpaceTime

Dr. habil. Petra Schopf

23.05.2017

Impressum:

Dr. Petra Schopf
Theory of Bound-Geodesics of Kerr-SpaceTime
Ein relativistisches Atommodell

1. Auflage 2020

ein Imprint der Westarp Verlagsservicegesellschaft mbH
Kirchstr. 5
39326 Hohenwarsleben
www.westarp.de

ISBN: 978-3-96004-051-4

Titelbild: The Andromeda Galaxy © Bradley auf Adobe Stock

Umschlaggestaltung: Lina Wangerin

Druck und Bindung: Druckerei Kühne & Partner GmbH & Co. KG
www.unidruck7-24.de

Printed in Germany.

1 Abstract

My concise volume 'Structures with Schwarzschild-Spacetime'"[7] started building a mathematical theory of bound geodesics. In the following, this endeavor will be pursued further in regard to Kerr-SpaceTime and a few inaccuracies will be smoothed out. The structures are significantly more complex in Kerr-SpaceTime.

We will start off with laying out the facts necessary to understand geodesics in Kerr-SpaceTime. The most important tools beyond that are the conservation laws of a geodesic and the descriptive differential equation system.

Afterwards, we will turn to the theory of bound-geodesics. An important characteristic of bound geodesics is that their orbit lies in the orbital plane. This plane must not be interpreted as a plane by cartesian coordinates. The Kerr-Metric is given by so called Boyer-Lindquist coordinates.

The Boyer-Lindquist coordinates are defined corresponding to a cartesian coordinate system as the spherical coordinates. Within the Boyer-Lindquist coordinates, the orbital plane is something like a plane. Within the cartesian coordinate system, the orbital plane is a corrugated plane through the coordinate origin. If the Kerr-SpaceTime is a Schwarzschild-SpaceTime, then the orbital plane is the equatorial plane.

In Schwarzschild-SpaceTime the orbits of all bound-geodesics lie in the equatorial plane. Kerr-SpaceTime shows quite a different picture. In Kerr-SpaceTime non-equatorial bound-geodesics exist also. The fundamental difference between equatorial and non-equatorial bound-geodesics is the apsidal procession. It turns out non-equatorial bound-geodesics always have a zero apsidal procession.

Hence, the portrayal of the apsidal procession is connected to the equatorial bound-geodesics. Through elliptic integrals of the second kind an explicit description of the apsidal procession is provided in the section 'Ëquatorial Bound-Geodesics'".

In general, the orbit of an equatorial bound-geodesic has infinitely length, no point in the equatorial plane is reached repeatedly. An important subclass of equatorial bound-geodesics are those that have a finite length. Those geodesics I call standing-wave-geodesics. This term will be expanded to non-equatorial bound-geodesics. Non-equatorial bound-geodesics are always center symmetric, equatorials are not.

The most important characteristic of the standing-wave-geodesics is their frequency. This will be explored in detail in the section 'SStanding-Wave-Geodesics'". Besides showing significant properties of the coordinate function of such geodesics, proving that standing-wave-geodesics always have an even frequency is central to this section.

A single Kerr-SpaceTime is does not encompass the whole universe, thus multiple Kerr-SpaceTime have to exist. Can Kerr-SpaceTimes interact with each other? This will be discussed in the section '"Kerr-Docking-

Space'". If two Kerr-SpaceTimes exist with certain unique positions towards each other, then certain bound geodesics can form a new geodesic that encompasses both coordinate origin. This constellation I call Kerr-Docking-Space.

If one assumes the orbit of this new geodesic to be the motion curve of a mass particle (e.g. an electron), then this creates a rather stable connection between both Kerr-SpaceTimes. This orbit can be pictured as sort of an eight where the two coordinate origin lie within the two loops. We will define conditions under which such a connection is possible. Taking this into account, binary star could form under the influence of special planets also.

Another topic around bound-geodesics in the question how tightly standing-wave-geodesics can be packed. Especially when picturing the atom as a Kerr-SpaceTime with a lot of standing-wave-geodesics as the atom‘s electrons, then numerous of those geodesics have to be placed within a tight space. Tightly packed equatorial standing-wave-geodesics are called shell. Not every Kerr-SpaceTime possesses shells. A large segment of the section '"Kerr-Shell-Space'ïs dedicated to this matter.

This compression combined with the docking-property leads to what I call Kerr-Complited-Shell-Space. This is discussed in the second part of the section '"Kerr-Shell-Space'". In this regard means docking-property means that the Kerr-SpaceTime becomes part of a Kerr-Docking-Space. It is shown that the maximum number of docking-points (potential bonding points of Kerr-Docking-Spaces) is 8, equal to the valency of atoms. I will also determine the number apohelion of a given

shell, which equals $2n^2$. This number is familiar from the atom‘s shell model. It will be demonstrated how the valency 8 breaks down into 2 and 6. A phenomenon well known from the atomic structure.

Those similarities already let you expect that the atom is a Kerr-SpaceTime. Especially the composition of the valency 8 in a Kerr-Complited-Shell-Space suggests that the atom cannot be understood as a Schwarzschild-Spacetime. I had undertaken this endeavor in my concise volume ’SStructures with Schwarzschild-SpaceTime’"with little success. The short segment ’"Null-Geodesics’"deals with light-like geodesics. We realize quickly that null-geodesics are not bound-geodesics.

Abstrakt

In meinem kleinen Werk “Strukturen mit Schwarzschild-Raumzeiten“ [7] wurde begonnen eine mathematische Theorie der gebundenen Geodäten (bound-geodesics) aufzubauen. Hier wird das für Kerr-SpaceTimes fortgesetzt und ein paar kleinere Ungenauigkeiten beseitigt. Die Strukturen sind in der Kerr-SpaceTime wesentlich komplexer.

Anfänglich wird notwendiges bekanntes zu Geodäten in der Kerr-SpaceTime kurz zusammengetragen. Die wichtigsten weiterhin notwendigen Arbeitsmittel sind die Erhaltungsgrößen einer Geodäte und das beschreibende Differentialgleichungssystem.

Danach wenden wir uns der Theorie der bound-geodesics zu. Die erste wichtige Eigenschaft von bound-geodesics ist, dass ihr Orbit in der Orbitalebene liegt. Diese Ebene darf man sich nicht als eine Ebene in kartesischen Koordinaten vorstellen. Die Kerr-Metrik wird in sogenannten Boyer-Lindquist-Koordinaten gegeben. Die Boyer-Lindquist-Koordinaten sind wie die Kugelkoordinaten in Bezug auf ein kartesisches Bezugskoordinatensystem definiert. In den Boyer-Lindquist-Koordinaten ist die Orbitalebene so etwas wie eine Ebene. Im kartesischen Bezugskoordinatensystem ist die Orbitalebene eine gewellte Fläche durch den Koordinatenursprung. Wenn die Kerr-SpaceTime eine Schwarzschild-

SpaceTime ist, dann ist die Orbitalebene die Äquatorebene.

In der Schwarzschild-SpaceTime liegen die Orbits aller bound-geodesics in der Äquatorebene. Ganz anders in der Kerr-SpaceTime. in der Kerr-SpaceTime exitieren auch non-equatorial bound-geodesics. Der wesentliche Unterschied zwischen den equatorial und non-equatorial bound-geodesics ist die Periheldrehung. Es stellt sich heraus, dass non-equatorial bound-geodesics immer die Periheldrehung Null haben.

Deshalb ist die Darstellung der Periheldrehung mit den equatorial bound-geodesics verbunden. Mittels der elliptischen Integrale zweiter Art wird im Abschnitt "Equatorial Bound-Geodesics" eine expliziete Darstellung der Periheldrehung gegeben.

Im Allgemeinen ist der Orbit einer equatorial bound-geodesic unendlich lang, es wird nie wieder der gleiche Punkt in der Äquatorebene erreicht. Eine wichtige Untergruppe der equatorial bound-geodesics sind diejenigen, deren Orbit eine endliche Länge hat. Diese Geodäten nenne ich standing-wave-geodesics. Der Begriff wird auch auf non-equatorial bound-geodesics erweitert. Eine non-equatorial bound-geodesic ist immer mittelpunktsymmetrisch, die equatorialen nicht.

Das wichtigste Merkmal der standing-wave-geodesics ist ihre Fequenz. Der Beschreibung ist der Abschnitt "Standing-Wave-geodesics" gewidmet. Neben wichtigen besonderen Eigenschaften der Koordinatenfunktionen solcher bound-geodesics ist der Beweis, dass standing-wave-geodesics immer eine gerade Frequenz haben Hauptinhalt des Abschnittes.

Eine einzelne Kerr-SpaceTime ist nicht das ganze

Universum, es existieren folglich mehrere Kerr-SpaceTimes. Können Kerr-SpaceTime miteinander kooperieren. Das ist die Frage im Abschnitt "Kerr-Docking-Space". Wenn zwei Kerr-SpaceTimes in bestimmter Position zueinander stehen, dann können bestimmte bound-geodesics eine neu Geodäte bilden, die beide Koordinatenursprünge umschließt. Diese Situation nenne ich Kerr-Docking-Space.

Denk man sich den Orbit dieser neuen Geodäte als Bewegungskurve eines Materieteilchens (z.B. ein Elektron), dann schafft dies eine recht stabile Verbindung beider Kerr-SpaceTimes. Anschaulich kann man sich diesen neuen Orbit als ein Art Acht vorstellen in deren beiden Ösen die beiden Koordinatenursprünge liegen. Es werden Bedingungen formuliert wann eine solche Verbindung möglich ist. So könnten auch mittels spezieller Planeten Doppelsterne entstehen.

Ein andere Fragestellung zu bound-geodesics ist die Frage wie dicht können standing-wave-geodesics gepackt werden. Insbesondere wenn man sich das Atom als eine Kerr-SpaceTime mit vielen standing-wave-geodesics als Elektronen des Atoms vorstellt, müssen viele solcher Geodäten auf engstem Raum positioniert sein. Dicht gepackte equatorial standing-wave-geodesics werden shell genannt. Nicht jede Kerr-SpaceTime hat shells. Diesen Fragen ist ein großer Teil des Abschnitts "Kerr-Shell-Space" gewidmet.

Diese Komprimierung mit der docking-Eigenschaft zusammengeführt führt zu den von mir so benannten Kerr-Complited-Shell-Space. Dem ist der zweite Teil des Abschnittes "Kerr-Shell-Space" gewidmet. Docking-Eigenschaft bedeutet hierbei, dass die Kerr-SpaceTime

Teil eines Kerr-Docking-Space wird. Es wird gezeigt, dass die maximale Anzahl von docking-points (mögliche Bindungspunkte von Kerr-Docking-Spaces) 8 ist, wie die Valenz von Atomen. Es wird auch die Anzahl von Apohelen einer erweiterten shell bestmmt, sie hat die Form $2n^2$. Diese Zahl ist aus dem Schalenmodell eines Atoms bekannt. Es wird gezeigt wie sich die Valenzzahl 8 in 2 und 6 aufteilt. Eine Erscheinung die aus dem Atomaufbau wohl bekannt ist.

Bereits aus diesen Ähnlichkeiten ist zu erwarten, dass das Atom ein Kerr-Valence-Space ist. Gerade die in einem Kerr-Valence-Space erklärte Afteilung der Valenzzahl 8 legt nahe, dass ein Atom nicht als Schwarzschild-SpaceTime aufgefasst werden kann. Den Versuch hatte ich in meinem kleinen Werk “Strukturen mit Schwarzschild-Raumzeiten“ mit wenig Erfolg unternommen.

Im kleinen Abschnitt “Null-Geodesics“ werden null-geodesics (lichtartige Geodäten) betrachtet. Wir stellen sehr schnell fest, dass null-geodesics nicht bound-geodesics sind.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

2 Kerr-Metrik

Die Kerr-Metrik auf dem $\mathbb{R}^4$ bildet die Kerr-SpaceTime und dient zur Beschreibung von rotierenden Schwarzen Löchern. Sie lässt sich in den Boyer-Lindquist-Koordinaten am einfachsten formulieren. Das ist ein 3-dimensionales Koordinatensystem im Raumteil der Kerr-SpaceTime, das an die Kugelkoordinaten angelehnt ist. Die kartesischen Koordinaten des $\mathbb{R}^4$ seien (t, x, y, z), die t-Koordinaten wird in der Physik als (Raum-) Zeit bezeichnet und $\{(x, y, z)\}$ bildet den Raumteil. Wie bei den Kugelkoordinaten wird der Winkel zwischen der positiven z-Achse und dem Radiusvektor des Raumteil-Punktes wird (Boyer-Lindquist) Polarwinkel ϑ genannt und der Winkel zwischen der positiven x-Achse und der Projektion des Radiuswinkels auf die xy-Ebene Azimutwinkel.

Die Boyer-Lindquist-Koordinaten sind ellipsoidische Koordinaten eines abgeplatteteen Ellipsoid. Der Zusammenhang zu den kartesischen Koordinaten wird gegeben durch

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin\vartheta \cos\varphi \\ y &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin\vartheta \sin\varphi \\ z &= r \cos\vartheta. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Im Unterschied zu den Kugelkoordinaten geht hier die zustzliche Größe a ein. Physikalisch ist a der Quotient

aus dem Drehimpuls L_c des Zentrums (des schwarzen Loches) und der Gravitationsmasse M des Zentrums

$$a = \frac{L_c}{M}, \tag{2.2}$$

Man beachte, in den Boyer-Lindquist-Koordinaten (r, ϑ, φ) ist r nicht die übliche Radialkoordinate der Kugelkoordinaten $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ sondern die Boyer-Lindquist-r-Koordinate ist

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 \sin^2 \vartheta. \tag{2.3}$$

Anschaulich kann man die Boyer-Lindquist-Koordinaten als ellipsoidische Koordinaten mit Rotation um die z-Achse.

Die Koordinate Boyer-Lindquist-Koordinate φ ist der üblichen Azimutwinkel der Kugelkoordinaten. Dagegen ist ϑ der Boyer-Lindquist-Koordinaten nicht identisch mit dem Polarwinkel θ der Kugelkoordinaten:

$$\sin^2 \vartheta = \frac{r^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \tag{2.4}$$

Setzt man hier die Werte für r^2 ein, erhält man

$$\begin{aligned} a^2 \sin^4 \vartheta - \left(||^2 + a^2\right) \sin^2 \vartheta + ||^2 \sin^2 \theta &= 0 \\ \sin^2 \vartheta &= \frac{||^2 + a^2}{2a^2} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4a^2 ||^2 \sin^2 \theta}{\left(||^2 + a^2\right)^2}} \right] \end{aligned} \tag{2.5}$$

Hierbei ist

$$||^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{2.6}$$

das Quadrat des euklidischen Abstandes. Die ϑ-Koordinate der Boyer-Lindquist-Koordinaten wird **Boyer-**

Lindquist-Polarwinkel oder, wenn keine Verwechselungen möglich sind, einfach **Polarwinkel** genannt. Mit (2.5) wird der Boyer-Lindquist-Polarwinkel durch den Radius und den Polarwinkel der Kugelkoordinaten ausgedrückt. Offensichtlich ist $\theta = \pi/2$ dann und nur dann, wenn $\vartheta = \pi/2$, d.h. in der (x, y)-Ebene sind beide Polarwinkel gleich.

Die Äquatorebene $\vartheta \equiv \pi/2$ der Boyer-Lindquist-Koordinaten ist in den kartesischen Koordinaten die xy-Ebene mit ausgespartem Zentrumskreis mit dem Radius $|a|$

$$\{(r, \vartheta, \varphi) : \vartheta = \frac{\pi}{2}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \;\&\; x^2 + y^2 \geq a^2\} \tag{2.7}$$

Als Ebenen werden beide Äquatorebenen identifiziert.

Die Kerr-Metrik its eine stationäre und axialsymmetrische Vakuumlösung der einsteinschen Feldgleichungen für ungeladene, rotierende Schwarze Löcher. Sie ist nach Roy Kerr ([4]) benannt, der sie 1963 veröffentlicht hat.

Definition 1 (Kerr-Metrik) *Es seien $(t, r, \vartheta, \varphi)$ die Boyer-Lindquist-Koordinaten des $\mathbb{R}^4 = \{(t, x, y, z)\}$. Die Metrik in den Boyer-Lindquist-Koordinaten mit dem metrischen Tensor*

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} -(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}) & 0 & 0 & -\frac{2Mra\sin^2\vartheta}{\rho^2} \\ 0 & \frac{\rho^2}{\Delta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 & 0 \\ -\frac{2Mra\sin^2\vartheta}{\rho^2} & 0 & 0 & (r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2}{\rho^2}\sin^2\vartheta)\sin^2\vartheta \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

mit

$$\begin{aligned} \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta \\ \Delta^2 &= r^2 - 2Mr + a^2. \end{aligned} \tag{2.9}$$

heißt ***Kerr-Metrik****. Der mit dieser Metrik g versorgte $\mathbb{R}^4$ wird* ***Kerr-SpaceTime*** *$(\mathbb{R}^4, g)$ genannt.*

Für $a \to 0$ ($L_c \to 0$) geht die Kerr-Metrik in die Schwarzschild-Metrik über. Die Kerr-Metrik hat zwei Paarmeter, die Gravitationsmasse M und den Drehimpuls je Gravitationsmasse $a = L_c/M$. Der Parameter a - der spezifische Drehimpuls des Zentrums - wird auch **Kerrparameter** genannt. Die maximale Kerr-Rotation ist $a^2 = M^2$,

$$0 \leq a^2 \leq M^2. \tag{2.10}$$

Für $a^2 > M^2$ würden der Ereignishorizont $r_S^{\pm}$ (siehe unten) "zerreißen", die Metrik hätte eine nackte Singularität. Das führt zu physikalischen Widersprüchen. Deshalb gilt $a^2 \leq M^2$.

Es sei darauf hingewiesen, der metrische Tensor der Kerr-Metrik hängt nicht von t und φ ab.

In den Boyer-Lindquist-Koordinaten hat die Kerr-Metrik mehrere Sigularitätsebenen: $\Delta^2 = 0$, $\rho^2 = 0$ und $\rho^2 = 2M$. Diese Singularitätsebenen werden auch **Horizonte** genannt. Sie sind durch folgende Gleichungen bestimmt

$$\begin{aligned} r^{\pm} &= M \pm \sqrt{M^2 - a^2} \\ r_S^{\pm} &= M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \vartheta} \\ r_0 &= 0 \text{ wenn } \vartheta = \frac{\pi}{2} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Von den beiden Horizonten r^+ und r_S^+ wird die sogenannte **Ergoshäre** begrenzt. In diesem Bereich folgen

Materieteilchen intensiv der Rotationsbewegung des Zentrums.

Am Horizont $r_S^{\pm}$ wechselt der "Zeit-Koeffizient" $g_{00} = g_{tt}$ der Kerr-Metrik das Vorzeichen; außerhalb der Ergesphäre ist das Vorzeichen, wie gewohnt, "-".

Wegen (2.10) ist

$$0 \leq \Delta^2 \leq (r - M)^2 \leq r^2. \tag{2.12}$$

Das bedeutet der innere und äußere Ereignishorizont $r^{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$ liegen innerhalb des Schwarzschild-Radius, d.h. bei den meisten Objekten, wie z.B. die Sonne, innerhalb des Objektes.

Die inverse Kerr-Metrik-matrix (g^{ij}) ist

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{(a^2+r^2)-\Delta^2 a^2 \sin^2\vartheta}{\Delta^2\rho^2} & 0 & 0 & -\frac{2ar}{\Delta^2\rho^2} \\ 0 & \frac{\Delta^2}{\rho^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^{-2} & \\ -\frac{2ar}{\Delta^2\rho^2} & 0 & 0 & \frac{\Delta^2 - a^2\sin^2\vartheta}{\Delta^2\rho^2\sin^2\vartheta} \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

Der metrische Tensor (g_{ij}) wird zur Diagonalmatrix, wenn die Boyer-Lindquist-Koordinatenvektorfelder ∂_t und ∂_φ durch die beiden kanonischen Vektorfelder V und W ersetzt werden.

Definition 2 (kanonische Vektorfelder) *Die Vektorfelder V und W*

$$\begin{aligned} V &= (r^2 + a^2)\partial_t + a\ \partial_\varphi \\ W &= \partial_\varphi + a\sin^2\vartheta\ \partial_t \end{aligned} \tag{2.14}$$

werden ***kanonische Vektorfelder*** *genannt.*

Leicht nachzuprüfen ist, dass

$$\begin{aligned} \partial_t &= \frac{1}{\rho^2}\, V - \frac{a}{\rho^2}\, W \\ \partial_\varphi &= -\frac{a\sin^2\vartheta}{\rho^2}\, V + \frac{r^2+a^2}{\rho^2}\, W \end{aligned} \tag{2.15}$$

Wie elementare Berechnungen zeigen, gilt für die kanonischen Vektorfelder

$$\begin{aligned} g(V,W) &= 0 \\ g(V,V) &= -\Delta^2\rho^2 \\ g(W,W) &= \rho^2\sin^2\vartheta \end{aligned} \tag{2.16}$$

Satz 1 (Diagonalform der Kerr-Metrik) *Es sei* $(\mathbb{R}^4, g)$ *eine Kerr-SpaceTime. Die Vektorfelder*

$$\begin{aligned} \partial_0 &= \frac{1}{\rho\sqrt{|\Delta^2|}}\, V = \frac{1}{\rho\sqrt{|\Delta^2|}}\, \big((r^2+a^2)\partial_t + a\partial_\varphi\big) \\ \partial_1 &= \frac{\sqrt{\Delta^2|}}{\rho}\, \partial_r \\ \partial_2 &= \frac{1}{\rho}\, \partial_\vartheta \\ \partial_3 &= \frac{1}{\rho\sin\vartheta}\, W = \frac{1}{\rho\sin\vartheta}\, \big(\partial_\varphi + a\sin^2\vartheta\ \partial_t\big) \end{aligned} \tag{2.17}$$

sind eine orthonormale Basis mit

$$(g_{ij}) = diag\{-sgn\{\Delta^2\},\ sgn\{\Delta^2\},\ 1,\ 1\} \tag{2.18}$$

Nicht normiert, in der Basis $(V, \partial_r, \partial_\vartheta, W)$ ist der metrische Tensor gleich

$$\begin{aligned} (g_{ij}) &= diag\{-\Delta^2\rho^2,\ \frac{\rho^2}{\Delta^2},\ \rho^2,\ \rho^2\sin^2\vartheta\} \\ &= \rho^2\ diag\{-\Delta^2,\ \frac{1}{\Delta^2},\ 1,\ \sin^2\vartheta\} \end{aligned} \tag{2.19}$$

Außerhalb der Ergosphäre $r > r_S^+$ ist $\operatorname{sgn}\{\Delta^2\} = 1$.

Für die Tangente γ' an die Geodäte γ ergibt sich folgerichtig

$$\begin{aligned}
\gamma' &= t'\partial_t + r'\partial_r + \vartheta'\partial_\vartheta + \varphi'\partial_\varphi \\
&= \Big(\frac{t'}{\rho^2} - \frac{a\varphi' \sin^2\vartheta}{\rho^2}\Big)\ V + r'\partial_r + \\
&\quad + \vartheta'\partial_\vartheta + \Big(\frac{(r^2+a^2)\varphi'}{\rho^2} - \frac{at'}{\rho^2}\Big)\ W \\
&= \frac{\sqrt{\Delta^2}(t' - \varphi' a \sin^2\vartheta)}{\rho}\ \partial_0 + \\
&\quad + \frac{\rho r'}{\sqrt{\Delta^2}}\partial_1 \\
&\quad + +\rho\vartheta'\partial_2 + \\
&\quad + \frac{\varphi'(r^2+a^2) - t' a \sin\vartheta}{\rho}\ \partial_3
\end{aligned} \tag{2.20}$$